

UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA

Année Universitaire 2019-2020

ALGEBRE LINEAIRE Série 1

Exercice 1

On rappelle que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif. On munit \mathbb{R}^2 de la loi $+$ et la loi externe \cdot définie par :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \cdot (x,y) &= (\lambda x, \lambda y) \text{ si } \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 \cdot (x,y) &= (0,0) \text{ si } \lambda = 0 \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

Exercice 2

Déterminer si \mathbb{R}^2 muni des lois internes et externes suivantes est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Pour tout (a,b) et (c,d) dans \mathbb{R}^2 et α dans \mathbb{R} :

- 1- $(a, b) + (c, d) = (a + b, b + d)$; $\alpha \cdot (a, b) = (a, \alpha b)$
- 2- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$
- 3- $(a, b) + (c, d) = (c, d)$; $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

Exercice 3

On considère les espaces vectoriels \mathbb{R}^n , pour $n = 2, 3, 4$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni des lois usuelles. Parmi les ensembles suivantes, lesquels sont sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou de \mathbb{R}^n , avec $n = 2, 3, 4$?

- 1- $E_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \}$
- 2- $E_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0 \}$
- 3- $E_3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = 0 \}$
- 4- $E_4 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1 \}$
- 5- $E_5 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geq 0 \}$
- 6- $E_6 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geq 0 \}$
- 7- $E_7 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0 \}$
- 8- $E_8 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 1 \}$
- 9- $E_9 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est croissant} \}$

Exercice 4

1- L'ensemble des suites de réels divergentes est-il un espace vectoriel sur \mathbb{R} . ?

2- L'ensemble des fonctions numériques monotones (croissantes ou décroissantes) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? L'ensemble des fonctions numériques paires ?

3- L'ensemble des suites de réels (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+1} - 2u_n = 0$ est-il un espace vectoriel ?.

4- Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

a- $E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2z = \alpha - y \}$ (discuter selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$)

b- $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |2x - y| = \alpha z \}$ (discuter selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$)

5- On considère les ensembles suivants :

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \text{ et } y + z = 0 \}$$

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \}$$

$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \}$$

$$H = \{ (x + z, x - z, 2x + y + 3z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

a- Montrer que H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 (E, F et G sont des sous-espaces vectoriels).

b- Déterminer $E \cap F$, $E \cap G$ et $E \cap H$. Les ensembles de $E \cup F$, $E \cup G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

c- Donner une famille génératrice de E, F et H.

Exercice 6

1- Montrer que, si trois vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} d'un espace vectoriel sont linéairement indépendants, il en est de même pour $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ et $\mathbf{w} + \mathbf{u}$.

2- Montrer que, si deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} d'un espace vectoriel E sont générateurs de l'espace vectoriel E, il en est de même pour $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

3- Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ ou $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

